PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 1

El LIGO y el año de las Ondas Gravitacionales (y su centenario).

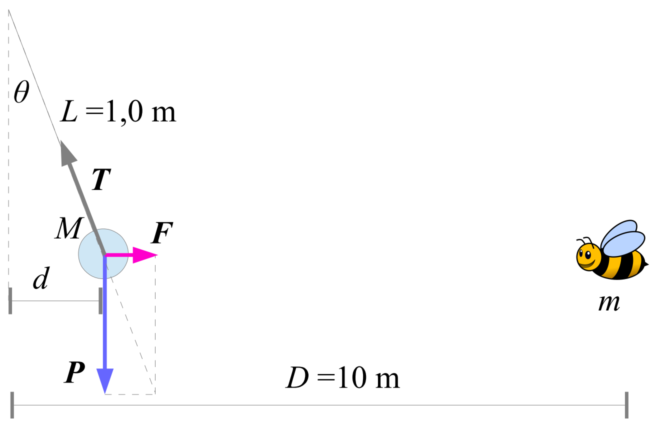
PARTE 1. "Escuchando el universo": Detección de ondas gravitacionales.

1a) Asumiendo que el ángulo que forma el péndulo con la vertical es pequeño, entonces se cumplen las siguientes relaciones,

$$\frac{d}{L} = sen\,\theta \approx tg\,\theta = \frac{F}{P} = \frac{\left(\frac{G\,M\,m}{D^2}\right)}{M\,g}$$

$$d \approx \frac{G\,m\,L}{g\,D^2}$$

$$\boxed{d \approx 6{,}8 \times 10^{-18} m}$$



1b) La máxima deformación observada en la señal del GW150914 es del orden de 10^{-21} . Como cada brazo del LIGO mide 4,0 km, entonces a partir de la definición de deformación (strain) (ec. 1), se tiene que el máximo desplazamiento del espejo fue,

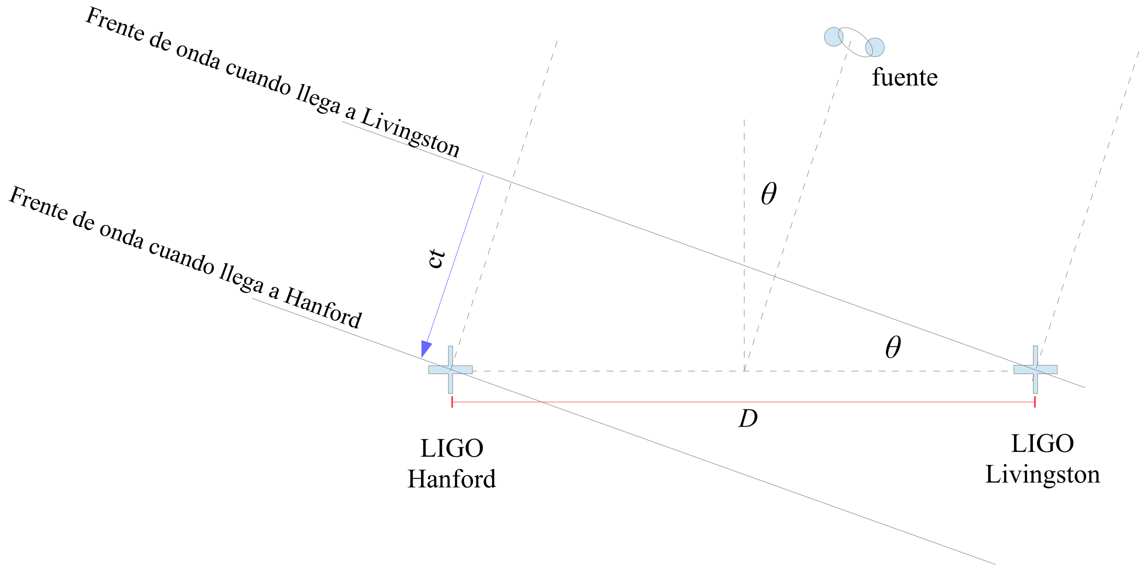
$$\Delta L = h\,L$$

$$\boxed{\Delta L = 4 \times 10^{-18} m}$$

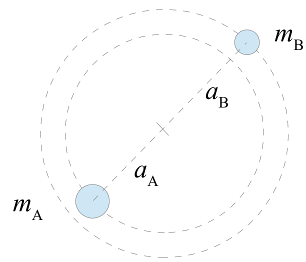
que es menor que el desplazamiento producido por la abeja de la parte anterior.

En relación al tamaño de un protón es del orden de 4 milésimas partes: $\Delta L = 4 \times 10^{-3}\,fm$

1c) El frente de onda recorrió una distancia *c·t* en el tiempo *t*. Donde *c* es la velocidad de la luz. Es fácil verificar que esa distancia se relaciona con el ángulo *θ* de procedencia de la onda y la distancia *D* entre los detectores, $c\,t = D\,sen\,\theta$. Entonces $\theta = arcsen\left(\frac{c\,t}{D}\right)$. $\boxed{\theta = 43{,}6\,^o}$



PARTE 2. "Danza cósmica": Sistemas binarios.



2a) Determinar la frecuencia de rotación del sistema.

El centro de rotación de ambas estrellas es el centro de masa del sistema binario, entonces se cumple,

$$a = a_A + a_B$$

$$m_A a_A = m_B a_B$$

De donde, $m_A a_A = m_B (a - a_A)$, entonces, $a_A = a \dfrac{m_B}{m_A + m_B}$ y $a_B = a \dfrac{m_A}{m_A + m_B}$.

Cada estrella describe un movimiento circular con la misma velocidad angular ω , mientras se atraen gravitacionalmente,

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_A \omega^2 a_A$$

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_B \omega^2 a_B$$

Entonces,

$$\omega = \sqrt{G \frac{m_B}{a^2 a_A}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}}}$$

2b)

$$v_A=\omega a_A=\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a^3}}a_A=\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a^3}}a\frac{m_B}{m_A+m_B}=m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}$$

$$\boxed{v_A=m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}}$$

$$\boxed{v_B=m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}}$$

2c)

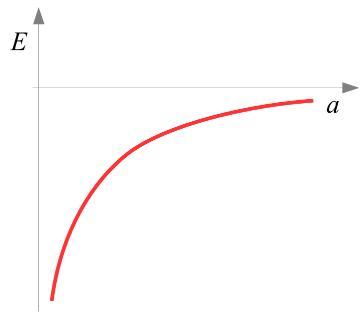
$$E=K+U=\frac{1}{2}m_A v_A^2+\frac{1}{2}m_B v_B^2-G\frac{m_A m_B}{a}=\frac{1}{2}m_A m_B^2\frac{G}{(m_A+m_B)a}+\frac{1}{2}m_B m_A^2\frac{G}{(m_A+m_B)a}-G\frac{m_A m_B}{a}$$

$$E=\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a}-G\frac{m_A m_B}{a}$$

$$\boxed{E=-\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a}}$$

2d)

2d1)
La energía del sistema es negativa e inversamente proporcional a la distancia entre las estrellas, de modo que si la energía se reduce entonces la distancia también.



2d2)
De acuerdo con la ecuación hallada en la parte 2a, al reducirse la distancia, aumenta la frecuencia.

2d3)
De la ecuación de la parte 2b, la velocidad aumenta.

En resumen: E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.

PARTE 3. “Música de las esferas”: Radiación de ondas gravitacionales.
3a)

$$a_{ISCO}=\frac{6G(m_A+m_B)}{c^2}$$

$$\boxed{a_{ISCO}=578\,km}$$

3b)

$$f_{ISCO}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a_{ISCO}^3}}$$

$$\boxed{f_{ISCO}=33{,}7\,Hz}$$

3c)

$$v_{A-ISCO}=m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a_{ISCO}}}$$

$$v_{B-ISCO}=m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a_{ISCO}}}$$

$$\boxed{v_{A-ISCO}=5{,}65\times10^7\,m/s}$$

$$\boxed{v_{B-ISCO}=6{,}60\times10^7\,m/s}$$

3d)

$$E_{ISCO}=-\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$$

$$E_{ISCO}=-2{,}42\times10^{47}J$$

$$\boxed{\Delta E_{ISCO}=E_0-E_{ISCO}=\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}}$$

$$\boxed{\Delta E_{ISCO}=2{,}42\times10^{47}J}$$

PARTE 4. "Conclusión": Colapso y defecto de masa.

4a) La masa perdida por el sistema ($\Delta M=3M_S$) es equivalente a la energía radiada gravitacionalmente desde t=0 hasta el colapso,

$$\Delta E_R=\Delta M\,c^2=5{,}47\times10^{47}J$$

La energía radiada durante el colapso es,

$$\Delta E_C=\Delta E_R-\Delta E_{ISCO}=2{,}98\times10^{47}J$$

La potencia de esa emisión,

$$P_C=\frac{\Delta E_C}{\Delta t}$$

$$P_C = 1{,}49\times 10^{49}\,W$$

$$\boxed{P_C = 3{,}87\times 10^{22}\,L_S}$$

4b) Con la frecuencia ($f = 150\,Hz$) y la deformación máxima ($h\approx 10^{21}$) medidas por LIGO (Fig. 2), junto con la potencia calculada en parte anterior, se puede, mediante la ec.2, determinar la distancia *r* a la que se encuentra el sistema binario,

$$h\approx \frac{1}{\pi f r}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$$

$$r\approx \frac{1}{\pi f h}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$$

$$r\approx 1{,}29\times 10^{25}\,m$$

$$\boxed{r\approx 1{,}36\times 10^{9}\,años\,luz}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Solución numérica	Puntos
1a	$d \approx \frac{G\,m\,L}{g\,D^2}$	$d \approx 6{,}8 \times 10^{-18}\,m$	0,9
1b	$\Delta L = h\,L$	$\Delta L = 4 \times 10^{-18}\,m$	0,4
1b	$\theta = arcsen\left(\frac{c\,t}{D}\right)$	$\theta = 43{,}6^{o}$	0,7
2a	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A + m_B}{a^3}}$		1,3
2b	$v_A = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B)a}}$ $v_B = m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B)a}}$		0,7
2c	$E = -\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a}$		0,9
2d	E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.		0,6
3a	$a_{ISCO} = \frac{6\,G(m_A + m_B)}{c^2}$	$a_{ISCO} = 578\,km$	0,7
3b	$f_{ISCO} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A + m_B}{a_{ISCO}^3}}$	$f_{ISCO} = 33{,}7\,Hz$	0,6
3c	$v_{A-ISCO} = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B)a_{ISCO}}}$ $v_{B-ISCO} = m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B)a_{ISCO}}}$	$v_{A-ISCO} = 5{,}65 \times 10^7\,m/s$ $v_{B-ISCO} = 6{,}60 \times 10^7\,m/s$	0,6
3d	$\Delta E = E_0 - E_{ISCO} = \frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$	$\Delta E = 2{,}42 \times 10^{47}\,J$	0,6
4a	$P_C = \frac{\Delta M\,c^2 - \Delta E_{ISCO}}{\Delta t}$	$P_C = 1{,}49 \times 10^{49}\,W$ $P_C = 3{,}87 \times 10^{22}\,L_S$	0,7
4b	$r \approx \frac{1}{\pi\,f\,h}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$	$r \approx 1{,}36 \times 10^9\,años\,luz$	1,3