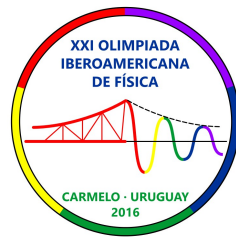




XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA

Problema N° 2 - SOLUCIONES

El smartphone: un laboratorio en el bolsillo.

Parte 1.

1a) Por Newton, $-ks = ma$, entonces: $s = -\frac{m}{k}a$

1b) Cuando la placa se desplaza una distancia s , es,

$$C_X(s) = \frac{\epsilon_0 A}{d-s} = \frac{\epsilon_0 A}{d \left(1 - \frac{s}{d}\right)} \approx \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(1 + \frac{s}{d}\right) = C_0 \left(1 + \frac{s}{d}\right)$$

Sustituyendo por el desplazamiento calculado en 1a, se obtiene la capacitancia en función de la aceleración del sensor,

$$C_X = C_0 \left(1 - \frac{m}{k d} a\right)$$

1c) La carga inicial del sistema es $Q_0 = 2C_0 V_0$. Por conservación de la carga, la carga total del sistema es, $C_X V_S + C_0 V_S = 2C_0 V_0$, de donde,

$$V_S = \frac{2C_0 V_0}{C_X + C_0} = \frac{2V_0}{\frac{C_X}{C_0} + 1}$$

Sustituyendo la capacitancia hallada en la parte 1b, se obtiene la diferencia de potencia en función de la aceleración,

$$V_S = \frac{2V_0}{\left(1 - \frac{m}{k d} a\right) + 1} = \frac{V_0}{1 - \frac{m}{2k d} a} \approx V_0 \left(1 + \frac{m}{2k d} a\right)$$

Hemos probado entonces que,

$$V_S \approx V_0 (1 + \beta a), \text{ donde } \beta = \frac{m}{2k d}$$

Parte 2.

2a) Aplicando Newton a la masa de prueba del sensor orientado verticalmente, se tiene,

$$-ks - mg = 0, \text{ de donde, } s = -\frac{mg}{k}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $a = g$ (a pesar de estar en reposo con respecto a la Tierra).

2b) Cuando el ascensor cae, la ecuación de Newton para la masa de prueba es, $-ks - mg = ma$, siendo $a = -g$, la aceleración del sensor. Por lo tanto, $s = 0$. Como el desplazamiento es nulo, la aceleración reportada por el sensor será también nula, $a = 0$ (aunque se encuentra acelerado).

2c) En el caso general, cuando el ascensor sube con aceleración a , la ecuación de Newton es la misma de la parte 2b, y el desplazamiento de la masa de prueba es, $s = -\frac{m(g+a')}{k}$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $a = g + a'$.

Parte 3.

La ecuación de movimiento de la barra con el smartphones se obtiene aplicando Newton (considerando despreciables las diferentes fuerzas disipativas), con respecto al eje de giro. Esto es, la suma de los torques con respecto al eje es igual al momento de inercia I , por la aceleración angular α ,

$$-mgL \cos \theta - Mg \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha$$

lo que es lo mismo,

$$-\frac{2m+M}{2I} g L \cos \theta = \alpha$$

donde θ , es el ángulo de la barra con respecto al eje x' (θ crece en sentido antihorario).

Como el smartphone se mueve siguiendo una trayectoria circular, la aceleración en coordenadas polares con respecto al sistema de coordenadas $x'-y'$, es,

$$\vec{a}' = -L\omega^2 \hat{r} + L\alpha \hat{\theta}$$

donde ω , es la velocidad angular del sistema, misma que mide el giroscopio del eje z del smartphone.

Los versores polares elegidos coinciden con los ejes del celular: el versor radial es opuesto al eje y ($\hat{r} = -\hat{y}$) y el versor tangencial coincide con el eje x ($\hat{\theta} = \hat{x}$).

Esto significa que las componentes de la aceleración del smartphone en el sistema propio del smartphone x-y, son,

$$a'_x = L \alpha$$

$$a'_y = L \omega^2$$

Como lo probamos en la parte 2c, la aceleración reportada por el acelerómetro es la suma de la aceleración en el sistema x'-y', y la componente opuesta de g. Proyectando g en el sistema x-y del smartphone, se tiene que las aceleraciones reportadas por el smartphone, son,

$$a_x = a'_x + g \cos \theta = L \alpha + g \cos \theta = -\frac{2m+M}{2I} g L^2 \cos \theta + g \cos \theta = \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right) g \cos \theta$$

$$a_y = a'_y - g \sin \theta = L \omega^2 - g \sin \theta$$

donde hemos utilizado la ecuación de movimiento para sustituir la aceleración angular de la primera ecuación.

De ambas ecuaciones se consiguen las expresiones para el seno y el coseno del ángulo de posición de la barra en función de los valores reportados por los sensores del smartphone, a_x , a_y y ω :

$$\cos \theta = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)}$$

$$\sin \theta = \frac{L \omega^2 - a_y}{g}$$

de donde se puede determinar la posición del smartphone en cualquier instante conociendo las medidas que reportan los sensores y los parámetros del sistema:

$$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)} L$$

$$y' = \frac{L \omega^2 - a_y}{g} L$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Puntos
1a	$s = -\frac{m}{k} a$	0,6
1b	$C_x = C_0 \left(1 - \frac{m}{k d} a \right)$	1,7
1c	$V_s \approx V_0 (1 + \beta a) \quad , \quad \beta = \frac{m}{2 k d}$	1,7
2a	$s = -\frac{m g}{k}$	0,6
2b	$a = 0$	0,6
2c	$a = g + a'$	0,6
3	$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} L$ $y' = \frac{L \omega^2 - a_y}{g} L$	4,2
3	$x' = L \sqrt{1 - \left(\frac{L \omega^2 - a_y}{g} \right)^2}$ $y' = \frac{L \omega^2 - a_y}{g} L$	3,8
3	$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} L$ $y' = L \sqrt{1 - \left(\frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} \right)^2}$	3,8