Problema 2.
Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

En 1897, el físico irlandés Joseph Larmor escribió un artículo donde describía la radiación debida a iones con movimiento acelerado. A pesar de que al momento de su publicación la física de partículas todavía se encontraba en sus inicios, la fórmula de Larmor ha servido para estudiar diferentes modelos. La manera convencional de escribir la potencia total radiada debida a una carga eléctrica puntual acelerada viene dada por

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

donde q es la carga eléctrica, a es su aceleración, c es la velocidad de la luz en el vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. Esta expresión es también conocida como Fórmula de Larmor no relativista.

En este ejercicio estudiaremos la potencia de radiación emitida en diferentes modelos: electrón como partícula uniformemente acelerada, electrón como oscilador armónico simple y el átomo de hidrógeno. En todos estos modelos solamente serán consideradas pérdidas de energía por radiación.

Parte A. Electrón como partícula uniformemente acelerada

Considere un electrón de masa m que desacelera a ritmo constante a desde una velocidad inicial v_0 hasta el reposo ($v = 0$). Responda las siguientes preguntas asumiendo que $v_0 \ll c$ por lo que la fórmula de Larmor puede ser utilizada.

A. 1	Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema).	**1.0 pt**

A. 2	Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15 \text{Å}$.	**1.0 pt**

A. 3	Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro.	**1.0 pt**

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

Considere ahora que el electrón describe un movimiento armónico simple. Asuma que la fórmula de Larmor no relativista todavía es válida.

B. 1	Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación).	**1.0 pt**

Sugerencia:
El promedio de la función $sin^2\theta(t)$ sobre un periodo T es igual a $\frac{1}{2}$ donde $\theta(t)$ es una función que depende del tiempo.

Si en el instante $t = 0$, el electrón inicia su movimiento con una velocidad que varía de acuerdo a la siguiente expresión $v = (4.030 \times 10^4)\cos[2\pi(6.414 \times 10^{13})t]\, m/s$.

B. 2	Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio?	**1.0 pt**

Parte C. Átomo de hidrógeno

En el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, un electrón no relativista, de masa m, describe un órbita alrededor de un protón con momento angular $L = \hbar$ (estado fundamental).

C.1	Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental.	**2.0 pt**

C.2	Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a	**0.5 pt**

$\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina.

Admitiendo que en un modelo clásico del átomo de hidrogeno ocurre radiación (No hay estados estacionarios). responda los siguientes apartados.

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Constantes

Masa del electrón: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

Carga del electrón: $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Permeabilidad magnética en el vacío: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3.0 \times 10^{8} m/s$

Constante de Planck: $h = 6.62 \times 10^{-34} J \cdot s$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Permitividad en el vacío: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$

$$1\text{Å} = 10^{-10} m$$