Problema 1. Conductividad térmica en un gas (10 puntos)

A. Demuestre que el camino libre medio modelando un área efectiva para la colisión viene dado por **2.5 pt**

$$\lambda = \frac{1}{4\,\pi r^2 n_0}$$

La cual indicará la máxima área para que la molécula pueda colisionar.

El área efectiva debe tener radio igual al diámetro de la molécula porque si las moléculas están más separadas que esta distancia, entonces no se tocarán. La distancia recorrida en un tiempo t, es vt, este arreglo forma un cilindro de radio $2r$ y altura vt.

El número de moléculas que hay en este cilindro es: $N = vt(4\pi r^2)n_0$

Por cada una de estas moléculas habrá una colisión, entonces el tendremos N colisiones mientras la molécula recorre una distancia t. Por tanto, el camino libre medio es la razón entre la distancia recorrida entre el número de colisiones que se dieron en esa distancia:

$$\lambda = \frac{vt}{vt(4\pi r^2)n_v} = \frac{1}{(4\pi r^2)n_0}$$

B. ¿Cuál debe ser el incremento de energía que se le da a cada molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K? **1.0 pt**

El incremento de energía por molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K es

$$\tfrac{3}{2}K_B = c_v.$$

C. Calcule la cantidad de energía media ganada o liberada por una molécula entre dos choques consecutivos si se encuentra en un gradiente de temperatura $\Delta T/\Delta x$ en la dirección x. **1.5 pt**

Sabiendo que la distancia media entre choques es el camino libre medio, la diferencia de energía por partícula es

$$\Delta E = c_v\,\Delta T' = c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\lambda$$

D.	Dé una expresión para la transferencia de energía por unidad de tiempo y área teniendo en cuenta el resultado anterior y sabiendo que hay n_0 partículas por unidad de volumen con velocidad media v.	**1.5 pt**

La cantidad de partículas en un volumen $Av\Delta t$ es $\Delta N = n_0 Av\Delta t$

$$\frac{J}{A} = -\Delta E\frac{1}{A}\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\Delta E\, n_0 v = -c_v n_0\, v\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

E.	Con ayuda de los resultados anteriores encuentre una expresión para la conductividad térmica del gas en función de la temperatura del gas.	**2.0 pt**

$$\kappa = c_v n_0\, v\lambda = \frac{K_B}{\pi r^2}\sqrt{\frac{K_B T}{8\pi M}}$$

F.	Asocie cada una de estas regiones de la figura con estos comportamientos.	**1.5 pt**

De la expresión del camino libre medio se puede ver que a menor presión el camino libre medio aumenta. Región 1 → C

Cuando el camino libre medio es mucho menor que las dimensiones la conductividad térmica no depende de la presión, lo que se puede ver en la acumulación de curvas para diferentes presiones. Región 3 → B

Y cuando es del orden la conductividad térmica depende de la presión y por tanto a diferentes presiones se obtendrían diferentes curvas. Región 2 → A