Problema 2.

Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

A. 1	Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema).	**1.0 pt**

Inicialmente el electrón posee únicamente energía cinética, utilizando el concepto de potencia podemos determinar la energía emitida.

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\Delta U = P \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{P \cdot \Delta t}{\frac{1}{2} m v_0^2}$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \Delta t$$

Aplicando cinemática tradicional determinamos el tiempo t necesario para que el electrón alcance una velocidad igual a cero.

$$v = v_0 - a\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{-v_0}{-a} = \frac{v_0}{|a|}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \frac{v_0}{|a|} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

A. 2	Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15$Å.	**1.0 pt**

Nuevamente con cinemática tradicional encontramos el valor de la aceleración

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$d = v_0\left(\frac{v_0}{|a|}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{|a|}\right)^2$$

$$d = \frac{v_0^2}{|a|} - \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{v_0^2}{2|a|}$$

$$|a| = \frac{v_0^2}{2d}$$

Con los valores proporcionados encontramos el resultado numérico utilizando la expresión del literal A.1)

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 v_0}{6\pi m c d}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 e^2 (5\times10^4 m/s)}{6\pi mc(15\times10^{-10} m)} = 2.1\times10^{-10}$$

A. 3	Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro.	**1.0 pt**

Utilizando lo aprendido en los literales previos, la situación cambia de movimiento horizontal a movimiento vertical con aceleración igual a g y $v_0 = 0$. La energía inicial será igual a la energía potencial gravitatoria mgh

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\Delta t$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2(9.80 m/s^2)}{1.00\times10^{-2} m}} = 2.80\times10^{-22}$$

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

B. 1	Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación).	**1.0 pt**

Ahora el movimiento del electrón se ha modelado como armónico simple. Recordando la expresión de la posición y la aceleración

$$x = x_0 sin(\omega t)$$
$$a = -x_0 \omega^2 sin(\omega t)$$

Reemplazando en la fórmula de Larmor

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{6\pi c} sin^2(\omega t)$$

Para encontrar la potencia irradiada promedio necesitaremos utilizar la expresión anterior. Si el estudiante hace un análisis de que la función $P(t)$ depende únicamente del promedio de la función seno y utiliza la sugerencia puede reescribir la expresión como

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi c}$$

B. 2	Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio?	**1.0 pt**

La expresión de la velocidad en el movimiento armónico simple es igual a

$$v = \omega x_0 cos(\omega t)$$

Por lo que la expresión del literal corresponde a

$$\omega x_0 = 4.030 \times 10^4 m/s$$
$$\omega = 2\pi(6.414 \times 10^{13}) Hz$$
$$\omega = 4.030 \times 10^{14} Hz$$
$$x_0 = 10^{-10} m$$
$$P = \frac{\mu_0 e^2}{12\pi c}(4.030 \times 10^{14})^4 (10^{-10})^2 = 2.394 \times 10^{-16} W$$

Parte C. Átomo de hidrógeno

C.1	Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental.	**2.0 pt**

El electrón, en el modelo del átomo de Bohr, describe una órbita circular, planteando la segunda ley de Newton

$$F = \frac{ke^2}{r_0^2} = ma$$

$$\frac{ke^2}{r_0^2} = \frac{mv^2}{r_0}$$

$$\frac{ke^2}{r_0} = mv^2 \quad \text{este resultado indica que } U = 2T$$

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr_0}$$

Utilizando la expresión del momento angular y despejando el radio de Bohr

$$\hbar = mvr_0$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_0}$$

Combinando ambas expresiones para la velocidad, el radio de Bohr es igual al

$$r_0 = \frac{\hbar}{mke^2}$$

La expresión de la energía total se describe como

$$E = T - U = \frac{U}{2} - U$$

$$E = -\frac{U}{2} = -\frac{ke^2}{2r_0}$$

C.2	Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a $\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina.	**0.5 pt**

$$\frac{r_0}{\lambda_c} = \frac{\frac{\hbar^2}{mke^2}}{\frac{\hbar}{mc}} = \frac{\hbar c}{ke^2} = 136.97 \approx 137$$

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

Escribiendo primero la velocidad en función de α, obtenemos la siguiente expresión

$$\alpha = \frac{\hbar}{r_0 m c}$$

$$v = \frac{\hbar}{m r_0} = \frac{\hbar}{m r_0}\frac{c}{c} = \alpha c$$

La potencia total irradiada viene dada por la fórmula de Larmor y la expresión de la aceleración centrípeta

$$P = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\frac{v^4}{r_0^2}$$

$$P = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}$$

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Encontrando primero la energía radiada por revolución

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = P \cdot T = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}\frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^3 c^2}{3 r_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\mu_0 c^2}{3k}\alpha^3 \approx 3.26 \times 10^{-6}$$