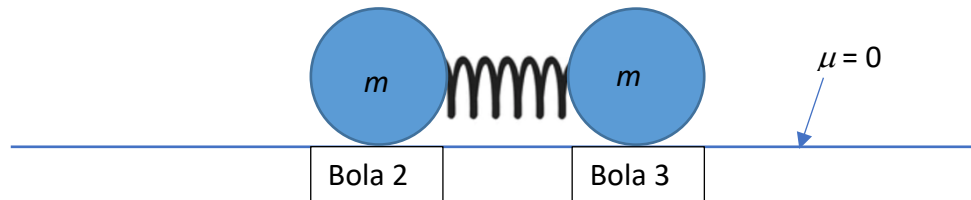
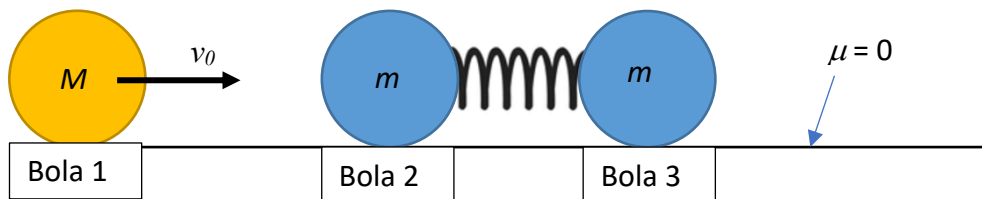


Problema Mecánica

El siguiente sistema está formado por dos bolas esféricas idénticas de masa m . Estas bolas se encuentran unidas por un resorte que posee una constante de fuerza k , el sistema se encuentra completamente en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura.



Una tercera bola, llamada Bola 1, de masa M , se traslada sin rotar hacia el sistema de la bola 2 y bola 3 con una rapidez v_0 . Colisiona elásticamente de modo directamente frontal con la bola 2. La relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$.



Considere que el tiempo de colisión, llamado τ , será muy pequeño en relación con el período de oscilación T , es decir, debe considerar que $\tau \ll T$, donde T es el período de oscilación de la bola 2 respecto al centro de masa de las bolas 2 y 3.

- Encuentre las velocidades finales de la bola 1 y bola 2 inmediatamente después de la colisión. (Puntuación 10%)
- Encuentre la posición en función del tiempo $x_{cm}(t)$ del centro de masa de las bolas 2 y 3. (Puntuación 10%)
- Calcule la amplitud de oscilación del movimiento de la bola 2. (Puntuación 25%).
- Encuentre de forma aproximada, utilizando el papel milimétrico que se le proporciona, la relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$, con la cual la colisión entre la bola 1 y la bola 2 se producirá una vez más. (Puntuación 55%).

Solución

a) Como el choque es completamente elástico, debe cumplirse las siguientes dos condiciones:

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2 \quad \text{Ec .1}$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{Ec .2}$$

Trabajando las ecuaciones 1 y 2, se obtiene para las velocidades

$$v_1 = v_0 \frac{M-m}{M+m} = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad \text{Ec .3} \quad \text{Puntuación (5\%)}$$

$$v_2 = v_0 \frac{2M}{M+m} = v_0 \frac{2}{1+\gamma} \quad \text{Ec .4} \quad \text{Puntuación (5\%)}$$

b) Como se tiene la condición $\tau \ll T$ entonces es posible considerar que la velocidad de la bola 3 es despreciable, $v_3 \approx 0$, de manera que para el centro de masas:

$$x_{cm} = \frac{m x_2 + m x_3}{2m} \longrightarrow v_{cm} = \frac{v_2}{2} = \frac{x_{cm}}{t}$$

$$x_{cm} = \frac{v_2 t}{2} = v_0 \frac{2}{1+\gamma} \frac{t}{2}$$

$$x_{cm} = v_0 t \frac{1}{1+\gamma} \quad \text{Ec .5} \quad \text{Puntuación (10\%)}$$

- c) En el sistema de coordenadas del centro de masas, las bolas 2 y 3 se mueven con una ecuación dada por :

$$x = A \operatorname{Sen}(\omega t)$$

Ec .6

Puntuación (3%)

Si la constante de fuerza del resorte es k , respecto al centro de masas será $2k$, de modo que para la frecuencia angular ω y un sistema masa resorte, se establece que :

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Ec .7

Puntuación (7%)

La amplitud se puede encontrar por conservación de la energía justo en el momento que la bola 1 golpea a la bola 2. En este punto el resorte no se ha deformado:

$$K_2 = U_{e \text{ resorte}}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} k' A^2 \quad \text{donde } k' = 2k$$

Al sustituir v_2 de la ecuación 4, se obtiene:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{2 v_0}{1 + \gamma} \right)^2 = k A^2$$

$$\frac{2 m v_o^2}{(1 + \gamma)^2} = k A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2 m v_o^2}{(1 + \gamma)^2 k}} = \frac{\sqrt{2} v_o}{(1 + \gamma) \sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\sqrt{2} v_o}{(1 + \gamma) \omega}$$

Ec. 8

(puntuación 15%)

- d) Las bolas 1 y 2 colisionarán de nuevo si se cumple que sus posiciones son iguales, es decir si:

$$x_1 = x_2$$

Encontrando x_1 :

$$v_1 = \frac{x_1}{t} \longrightarrow x_1 = v_1 t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t \quad \text{Ec. 9.} \quad (\text{puntuación 7\%})$$

Encontrando x_2 :

$$x_2 = x_{cm} + x = v_0 t \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) + A \text{Sen}(wt)$$

$$x_2 = v_0 t \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) + \frac{\sqrt{2} v_0}{(1+\gamma)w} \text{Sen}(wt) \quad \text{Ec. 10.} \quad (\text{puntuación 8\%})$$

Ahora retomando

$$x_1 = x_2$$

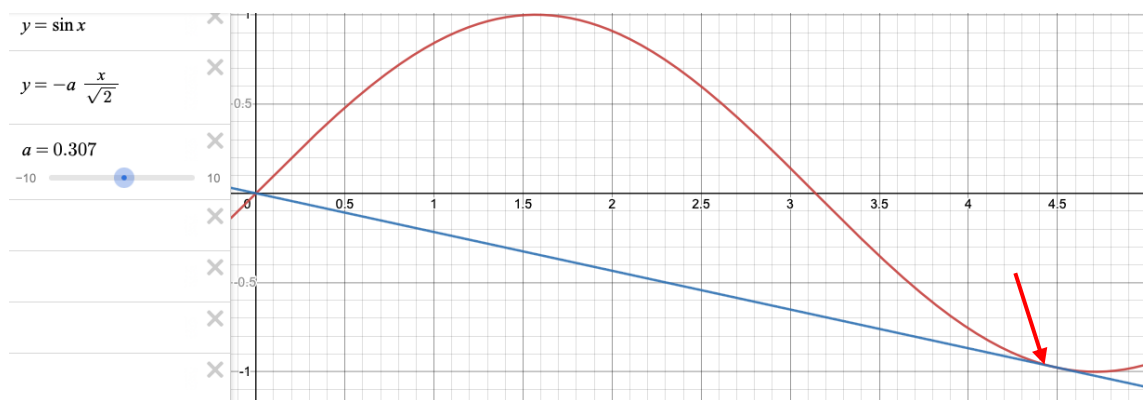
$$v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t = v_0 t \left(\frac{1}{1+\gamma} \right) + \frac{\sqrt{2} v_0}{(1+\gamma)w} \text{Sen}(wt)$$

$$v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t = \frac{v_0 t}{(1+\gamma)} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{wt} \text{Sen}(wt) \right]$$

$$-\frac{wt\gamma}{\sqrt{2}} = \text{Sen}(wt) \quad \text{Ec. 10.} \quad (\text{puntuación 15\%})$$

La relación de masas γ se puede calcular analizando la ecuación 10, si se encuentra la intersección de la recta. $y = -\frac{wt\gamma}{\sqrt{2}}$, con la sinusoidal $y = \text{Sen}(wt)$, para esto utilizaremos el papel milimétrico. Este planteamiento tiene una ponderación de 10%

Para esta solución se trabajó con el software `desmos` encontrando un valor para la relación de masas de : $\gamma \approx 0.31$



puntuación 15%)