

Solución problema Iceberg Tabular

Temas evaluados:

- Leyes de Newton
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Principio de conservación
- Oscilaciones armónicas
- Teorema de Arquímedes

Problema resuelto

De toda el agua que hay en la Tierra, únicamente el 2.5% es agua dulce. Casi un 70% del total del agua dulce de la Tierra se encuentra formando glaciares y casquetes de hielo. Los glaciares son grandes masas de hielo que se forman por la acumulación de nieve a lo largo de muchos años (incluso siglos), y se desplazan debido a su peso. Cuando un glaciar alcanza la costa, éste continúa siendo empujado hacia el mar mientras a la vez es arrastrado por las corrientes a lo largo del suelo oceánico. Entonces forma una plataforma de hielo. Cuando llega a un punto en que el océano es lo suficientemente profundo, la plataforma de hielo comienza a flotar y este cambio de dirección genera esfuerzos que finalmente rompen su unión con el glaciar, formando lo que se conoce como un iceberg tabular.

Los icebergs tabulares pueden tener gran tamaño, su superficie superior es relativamente plana y sus bordes laterales son muy empinados (Figura 1). Al igual que cualquier otro tipo de iceberg, la mayor parte del hielo de un iceberg tabular no se encuentra por encima del agua sino debajo de su superficie.



Figura 1: Iceberg tabular (Andrew Shiva / Wikipedia / CC BY-SA 4.0)

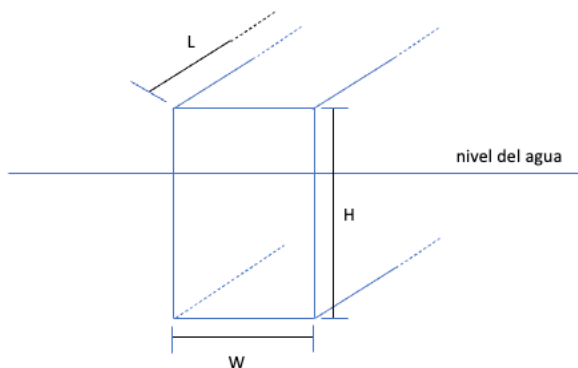
En las últimas décadas, el tamaño de las plataformas de hielo ha disminuido considerablemente, y se han observado grandes colapsos, desprendimientos e incluso la desaparición completa de algunas de ellas. Esto ha sido particularmente grave en la Península Antártica, donde

el colapso de las plataformas de hielo se relaciona con un incremento dramático de temperatura de $\sim 0.5^{\circ}\text{C}$ por década, durante más de siete décadas debido al calentamiento global. Como consecuencia la superficie de deshielo se incrementa produciendo más fracturas en el hielo, y se

produce mayor fusión en la parte inferior debido a que el agua del océano que circula debajo del hielo flotante está más caliente.

Considere un iceberg tabular con forma de un paralelepípedo recto de altura H , largo L y ancho W . Asuma que la densidad del hielo es $\rho_h = 0.900 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y que la densidad del agua de mar es $\rho_a = 1.027 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

1. Si el iceberg tiene la dimensión H en posición vertical, determine qué fracción de H se encuentra debajo de la superficie del agua.



h = altura del iceberg que está bajo agua

$$F_e = \rho_a V_a g = \rho_a W L h = \text{Fuerza de empuje}$$

$$F_g = \rho_h W L H = \text{Peso del hielo}$$

$$F_e = F_g$$

$$\rho_a W L h = \rho_h W L H$$

$$h = \frac{\rho_h}{\rho_a} H = \frac{0.900 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.027 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} H = 0.876 H$$

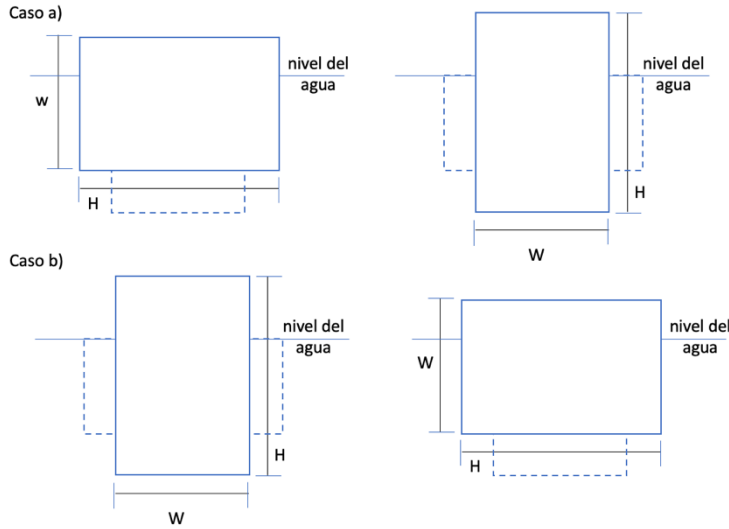
El 87.6% del iceberg se encuentra bajo agua.

Cuando un iceberg tabular se separa, toma un tiempo que las distintas fuerzas que actúan sobre él se equilibren y es posible que, en ese intervalo, se produzcan torques que harían que el iceberg fuera susceptible de voltearse y caer sobre su lado. Para que el iceberg se voltee, el paso del estado inicial al estado final sea energéticamente favorable. (Textos alternativos: Para que el iceberg se voltee, sus dimensiones deben ser tales que el cambio de energía entre el estado final e inicial sea tal que no se requiera entregar energía al sistema iceberg-agua desde una fuente externa. Para que el iceberg se voltee, el intercambio de energía entre el iceberg y el volumen desplazado de agua debe ser suficiente para pasar del estado inicial al estado final). (Sugerencia: compare únicamente el estado inicial y final del iceberg).

2. Si $L > W$ y $W = \alpha H$ para el iceberg tabular y $0 < \alpha < 1$, considere los casos:

- a) el iceberg tiene inicialmente la dimensión W en posición vertical y se voltea para tener la dimensión H en posición vertical,
- b) el iceberg tiene inicialmente la dimensión H en posición vertical y se voltea para tener la dimensión W en posición vertical,

y encuentre cuál de los dos favorece que el iceberg se voltee.



Las figuras muestran el estado del iceberg antes y después de voltearse para los dos casos a considerar. Las dimensiones en la figura son solo ilustrativas y NO están a escala. En cualquier caso, el centro de gravedad del iceberg se desplaza al pasar de la posición inicial a la posición final: desciende en el caso *a* y asciende en el caso *b*. De la misma manera, el centro de gravedad del volumen de agua desplazado cambia de posición: un volumen de agua desplazado sube

en el caso *a* y cae en el caso *b*. La línea punteada muestra los intercambios de posición del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final.

Calcularemos estos centros de gravedad con respecto a la superficie del agua:

Caso a):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W - (1 - 0.876)W = -0.376W$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H + (1 - 0.876)H = -0.376H$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376H + 0.376W) \\ &= \rho_h \alpha H^2 Lg(-0.376H + 0.376\alpha H) \\ &= -0.376\rho_h g LH^3 \alpha(1 - \alpha) < 0 \\ &= -(0.376)(0.900 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)LH^3(\alpha - \alpha^2) \\ &= -3319.704 LH^3(\alpha - \alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha perdido energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)W - (-0.5(0.876)H) = -0.438(W - H) = -0.438(\alpha H - H) = 0.438H(1 - \alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_a &= \rho_a HWLg[0.438H(1 - \alpha)] \\ &= 0.438\rho_h LgH^3\alpha(1 - \alpha) > 0 \\ &= (0.438)(1.027 \times 10^3 kg/m^3)(9.81m/s^2)LH^3(\alpha - \alpha^2) \\ &= 4412.793LH^3(\alpha - \alpha^2)\end{aligned}$$

El agua desplazada ha ganado energía potencial gravitacional.

En este caso, la energía ganada por el agua desplazada es mayor que la energía perdida por el iceberg, lo cual indica que, para que el iceberg que se encuentra inicialmente con la dimensión W en posición vertical, se necesita entregar energía al sistema ya que la energía potencial perdida por el iceberg no es suficiente para elevar el volumen de agua desplazado. El volteo del iceberg en este caso NO es energéticamente favorable.

Caso b):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H + (1 - 0.876)H = -0.376H$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W + (1 - 0.876)W = -0.376W$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376W + 0.376H) \\ &= \rho_h \alpha H^2 Lg(-0.376\alpha H + 0.376H) \\ &= 0.376\rho_h gLH^3\alpha(1 - \alpha) > 0 \\ &= (0.376)(0.900 \times 10^3 kg/m^3)(9.81m/s^2)LH^3(\alpha - \alpha^2) \\ &= 3319.704LH^3(\alpha - \alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha ganado energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)H - (-0.5(0.876)W) = 0.438(W - H) = 0.438(\alpha H - H) = -0.438H(1 - \alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}
\Delta E_a &= \rho_a HWLg[-0.438H(1 - \alpha)] \\
&= -0.438\rho_h LgH^3\alpha(1 - \alpha) < 0 \\
&= (-0.438)(1.027 \times 10^3 kg/m^3)(9.81m/s^2)LH^3(\alpha \\
&\quad - \alpha^2) \\
&= -4412.793LH^3(\alpha - \alpha^2)
\end{aligned}$$

El agua desplazada ha perdido energía potencial gravitacional.

La “caída” del volumen desplazado de agua entre el estado inicial y el estado final proporciona suficiente energía para lograr el incremento de energía potencial del iceberg y deja incluso un sobrante de energía que se transfiere al océano (una buena parte de esta energía crea un tsunami). Entonces, en este caso, el volteo del iceberg es energéticamente favorable.

3. Para el caso en que el iceberg se voltea (es decir, cuando esto es energéticamente favorable), encuentre una expresión para la magnitud del cambio total de energía del sistema iceberg-agua y, por inspección de esta ecuación o por medio de su gráfica, encuentre el valor de α para el cual el cambio de energía es máximo.

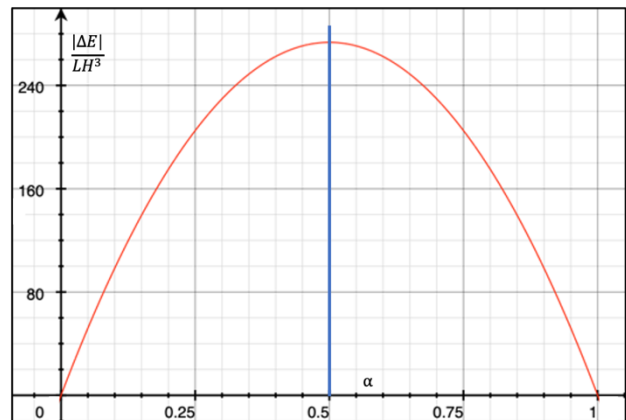
El cambio total de energía en el sistema será

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta E_h + \Delta E_a \\
&= 3319.704LH^3(\alpha - \alpha^2) - 4412.793LH^3(\alpha - \alpha^2) \\
&= -1093.089LH^3(\alpha - \alpha^2)
\end{aligned}$$

La expresión para la magnitud del cambio total de energía será:

$$|\Delta E| = 1093.089LH^3(\alpha - \alpha^2)$$

La ecuación corresponde a una parábola cuyo vértice (valor máximo) se encuentra cuando $\alpha = 0.5$. (Este resultado pueden también obtenerlo por derivación.



4. Si el iceberg tiene dimensiones $L = 800$ m, $H = 1200$ m y α es la obtenida en el inciso 3, calcule la cantidad de energía que se libera al voltear el iceberg.

$$|\Delta E| = 1093.089LH^3(\alpha - \alpha^2) = (1093.089)(800m)(1200m)^3(0.5 - 0.5^2) \\ = 1.049 \times 10^9 J$$

5. Si al voltearse el iceberg del inciso 4, éste se sumerge por debajo de su posición de equilibrio una fracción de 0.01 de su dimensión vertical final, encuentre el período de oscilación del movimiento del iceberg si se desprecia la resistencia del agua.

El dato de la fracción sumergida es un distractor. No se requiere para la solución. La dimensión vertical final es W .

Sea y la distancia que el iceberg se desplaza por encima de la posición de equilibrio (positiva si se eleva y negativa si se sumerge) y w la fracción de la dimensión vertical sumergida cuando está en su posición de equilibrio ($0.876W$). Por el principio de Arquímedes, sobre el iceberg actúan su peso y el empuje del agua del mar. Si el iceberg está en su posición de equilibrio, estas fuerzas son iguales, $y = 0$ y la fuerza neta es cero:

$$F(y) = \rho_h LHW a_y = \rho_h LHW \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_h LHW g + \rho_a LHw g = 0$$

En cambio, si el iceberg se sumerge por debajo de su posición de equilibrio, la fuerza de empuje será mayor que el peso, por lo que se tendrá una fuerza neta hacia arriba. Si el iceberg se eleva por encima de su posición de equilibrio, el peso será mayor que la fuerza de empuje, produciendo una fuerza hacia abajo.

La fuerza neta será:

$$F(y) = ma_y = \rho_h LWH a_y = \rho_h LWH \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_h LWH g + \rho_a LH(w - y)g \\ = -\rho_h LWH g + \rho_a LHw g - \rho_a LH y g$$

Los primeros dos términos corresponden a las fuerzas en la posición de equilibrio (que se compensan) por lo que la fuerza neta será:

$$F(y) = \rho_h LWH a_y = \rho_h LWH \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_a LH g y$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico para el cual la constante k será:

$$k = \rho_a LH g$$

De modo que el período de oscilación estaría dado por:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m_h}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_h LHW}{\rho_a LHg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_h W}{\rho_a g}} = 2\pi \sqrt{\frac{w}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.876W}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{(0.876)(0.5H)}{g}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{(0.876)(600)}{9.81}} = 7.320s
 \end{aligned}$$

Rúbrica:

Inciso	Punteo	
1	15	
2	35	10 por obtener correctamente los cambios de energía del iceberg. 10 por obtener correctamente los cambios de energía del agua desplazada 15 por explicar correctamente por qué el caso b es el energéticamente favorable
3	25	10 por obtener la ecuación correcta 7 por el análisis de la ecuación o elaboración de la gráfica 8 por obtener correctamente el valor de α
4	10	
5	20	5 por plantear la ecuación 5 por identificar correctamente la constante k 5 por plantear la ecuación del período 5 por obtener el valor del período